

KEIHÄÄNHEITON FYSIIKKA

Joonas Saari

Kandidaatintutkielma
Tammikuu 2018
Fysiikan ja matematiikan laitos
Itä-Suomen yliopisto

Joonas Saari	Fysiikan kandidaatintutkielma, 26 sivua Itä-Suomen yliopisto Fysiikan koulutusohjelma Fysiikan aineenopettajakoulutus
Työn ohjaajat	FT. Risto Leinonen

Tiivistelmä

Tutkielmassa selvitettiin keihäänheittoon liittyvää fysiikan teoriasisältöä. Keihäänheitosta tehtyjen aiempien tutkimusten avulla on pystytty selvittämään keihään optimaaliset lähtöolosuhteet, niin ihmisen biomekaniikan kuin keihään ominaisuuksien ja sääolosuhteiden näkökulmasta. Tutkimuksia on tehty myös värähtelyn vaikutuksesta keihään lentorataan, ja optimaalista lentorataa on pyritty myös simuloimaan tietokoneavusteisten mittalaitteiden avulla.

Tässä tutkielmassa käsitellään keihäänlentoa vaikuttavia tekijöitä esittämällä niille fysikaalisia ja matemaattisia malleja. Oleellisia keihään lentorataan vaikuttavia tekijöitä ovat lähtönopeus, lähtökulma ja aerodynaamiset voimat ilmanvastus ja nostovoima. Lähtökulman lisäksi toinen oleellinen tarkasteltava kulma keihään lennon aikana on kohtauskulma. Kohtauskulmalla tarkoitetaan keihään nopeuden ja liikkeen aiheuttaman ilmavirran välistä kulmaa. Kohtauskulmalla voi olla keihään lentoradan kannalta joko positiivinen tai negatiivinen vaikutus, ja muuttamalla kohtauskulmaa heittäjä voi säädellä keihäänlentoa optimaaliseksi eri tuuliolosuhteissa. Näitä yllämainittuja tekijöitä tarkastellaan aluksi yksinkertaisella tasolla ja niiden käsittelyssä edetään johdonmukaisesti pistemäisen kappaleen lentoradasta ilmanvastuksen ja nostovoiman vaikutukseen ja lopuksi keihään muodon vaikutukseen.

1 Johdanto	1
2 Teoria	4
2.1 Keihään lentoon vaikuttavat tekijät	4
2.2 Pistemäisen kappaleen heittoliikkeen fysiikka	5
2.3 Ilmanvastuksen vaikutus	8
2.4 Nostovoiman vaikutus	12
2.5 Keihään muodon vaikutus	14
3 Pohdinta	20
Viitteet	22

Keihäänheiton juuret ovat Antiikin Kreikassa, missä keihästä käytettiin metsästysvälineenä. Urheilulajiksi keihäänheitto tuli antiikin Kreikan Olympialaisissa, osana kymmenottelua. Antiikin Olympialaisissa oli käytössä kaksi erilaista keihäänheittokilpailua, joissa toisessa mitattiin heitettyä matkaa ja toisessa tarkkuutta. Alkujaan keihäät olivat tehty puusta ja niissä oli terävä metallinen kärki. Keihään painopisteen kohdalla oli nahkainen remmi, jonka avulla heittäjä sai heittonsa lisää tarkkuutta. (Terry, 2017) Nykymallin keihäessä ei enää ole tällaista remmiä, sillä heiton tarkkuudella ei keihäänheitossa juurikaan ole väliä. Nykypäivänä keihäänheitto on edelleen suosittu urheilulaji, ja nykyaikaisten tutkimusvälineiden sekä tutkimusmenetelmien avulla on voitu tutkia keihäänheittoa sekä pystytty parantamaan keihäänheiton tuloksia.

Oleellisia keihään lentorataan liittyviä ominaisuuksia ovat keihään aerodynamiikka, sääolosuhteet, kuten ilmankosteus ja ilmantiheys, sekä heittäjän biomekaniikka¹.

¹ Biomekaniikalla tarkoitetaan biologisten järjestelmien tutkimusta mekaniikan avulla. Fysiikan lisäksi biomekaniikassa hyödynnetään eri biologian osa-alueita, kuten anatomiaa, fysiologiaa ja kinesiologiaa. (Biomechanics Wikipedia, 2017)

Keihäänheittoon liittyviä tekijöitä on tutkittu aiemmin esimerkiksi Kingstonin yliopistossa tehdyissä tutkimuksissa (Hatton, 2005 & 2007). Niissä käsitellään keihään lentorataan vaikuttavia tekijöitä ja mallinnetaan niitä matemaattisesti. Tutkimuksissa käsitellään matemaattisesti myös ihmisen biomekaniikan vaikutusta keihäänheitossa.

Keihäänheiton biomekaniikkaa ovat analysoineet aiemmin myös Gregor ja Pink (1985). Heidän tekemässään tutkimuksessa analysoitiin Tom Petranoffin heittämää maailmanennätysheittoa (99,72 m) käyttämällä apuna suurnopeusvideokameraa. Tutkimuksessa havaittiin, että Petranoffin heiton lähtönopeus oli suurin koskaan mitattu ($32,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Videomateriaalin analysoijat olivat kaikki samaa mieltä siitä, että lähtönopeuden suuruus on tärkein heittopituuteen vaikuttava tekijä. Toinen oleellinen keihään lentopituuteen vaikuttava tekijä on lähtökulma. Kirjallisuudessa heittojen lähtökulma on määritetty olevan noin välillä 20° - 41° . Tutkimuksessa havaittiin, että Petranoffin heiton lähtökulma oli $32,7^\circ$, mikä sijoittuu melko tarkasti välin keskelle. Myös Komin ja Meron (1985) tekemä vastaavanlainen tutkimus Olympiatason keihäänheittäjien biomekaniikasta vahvistaa näitä tuloksia. Heidän tekemässään tutkimuksessa kuitenkin huomattiin myös, että hyvien ja huonojen heittosuoritusten välillä olevat erot ovat olleet niin pieniä, että niiden havaitseminen tutkimuksessa käytetyllä laitteistolla oli hankalaa.

Eliittikeihäänheittäjien tuloksia verrattaessa myös näillä pienillä lentopituuteen vaikuttavilla tekijöillä on merkitystä. Hubbard ja Bergman (1989) ovat esimerkiksi tutkineet keihään värähtelyn vaikutusta keihäänlennon aikana vaikuttaviin voimiin. Tutkimuksessa havaittiin, että kaikenlainen värähtely lisää keihäaseen vaikuttavien voimien suuruutta. Nämä voimat ovat suurimmallaan silloin kuin keihään ja ilmavirtauksen välinen kulma on mahdollisimman pieni ja värähtelyn amplitudit mahdollisimman suuria. Värähtely vaikuttaa keihään lentoon negatiivisesti, joten sen vaikutukset ovat erityisen tärkeä huomioida etenkin eliittiheittäjien keskuudessa.

Aiempiä tutkimuksia on tehty myös esimerkiksi optimaalisten lentoonlähtöominaisuuksien määrittämiseksi. Chiu (2009) on pyrkinyt selvittämään näitä optimaalisia lähtöolosuhteita tietokonesimulaation avulla. Tutkimuksen perusteella miesten keihäällä voidaan saavuttaa maailmanennätystulos, kun lähtökulma on $35,5^\circ$ ja lähtönopeus $31,213 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Naisten keihäälle vastaavat arvot ovat $42,6^\circ$ ja $26,672 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tulosten laskemisessa on tuuliolosuhteet oletettu nolleksiksi. Best, Bartlett ja Sawyer (1995) ovat myös hyödyntäneet tietokonesimulaatiota optimaalisen keihään irtoamishetken määrittämiseksi. Heidän tekemässään tutkimuksessa havaittiin, että optimaaliset lähtöominaisuudet ovat jokaiselle keihäälle erilaiset.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on keskittyä erityisesti siihen, mitkä tekijät vaikuttavat keihään lentorataan ja tarkastella keihään lentoa siitä hetkestä alkaen, kun keihäs irtoaa heittäjän kädestä. Näin ollen ihmisen biomekaanisia ominaisuuksia ei käsitellä. Työssä johdetaan keihään lentoradalle fysikaalinen ja matemaattinen malli. Aluksi käydään läpi pistämäisen kappaleen heittoliike, jonka jälkeen siirrytään tarkastelemaan ilmanvastuksen ja nostovoiman vaikutusta kappaleen lentorataa. Seuraavaksi yhdistetään näiden pohjalta saadut tiedot ja esitellään matemaattinen malli, joka kuvaa keihään lentorataa paikkavektorin avulla. Lopuksi pohditaan tulosten merkityksellisyyttä sekä mahdollisia jatkotutkimusideoita.

Tässä kappaleessa tutkitaan keihään lentoon vaikuttavia tekijöitä. Aluksi näitä käsitellään yleisellä tasolla, jonka jälkeen keskitytään pistemäisen kappaleen heittoliikkeeseen. Seuraavaksi tarkastelua laajennetaan huomioimalla ilmanvirtauksen aiheuttamat ilmanvastus ja nostovoima. Teoriakappaleen lopussa tarkastellaan vielä keihään muodon vaikutusta näihin edellä mainittuihin voimiin ja keihään lentorataan.

2.1 Keihään lentoon vaikuttavat tekijät

Keihään lentoon vaikuttaa monet erilaiset tekijät, esimerkiksi ihmisen biomekaniikka, keihään ominaisuudet ja ilman ominaisuudet, kuten ilman tiheys. Tässä työssä ihmisen biomekaniikka kuitenkin jätetään tarkastelun ulkopuolelle, sillä sen käsitteleminen ei ole tämän tutkielman kannalta oleellista.

Tärkeimmät keihään lentorataan vaikuttavat tekijät ovat lähtönopeus ja lähtökulma, joilla keihäs irtoaa heittäjän kädestä. Keihään kulkema matka on verrannollinen nopeuden neliöön, jolloin 10% nopeuden kasvu lisää keihään lentämää matkaa 21% ($1.1 \cdot 1.1 = 1,21$) (Hatton, 2005). Useimmille kappaleille optimaalinen lähtökulma on n. 45° . Keihään aerodynaamiset ominaisuudet huomioon ottaen lähtökulman tulisi olla noin $36^\circ - 40^\circ$. Tämä voidaan laskea keihään painopisteen kulkemasta reitistä. Lähtökulman lisäksi keihään lentoon vaikuttaa ilmapirran ja keihään nopeuden välinen kulma, jota

kutsutaan kohtauskulmaksi (*angle of attack*). Optimaalisin kohtauskulma on noin $0^\circ - 5^\circ$ (Hatton, 2005). Kappaleen 2.5 yhteydessä kohtauskulmaa tarkastellaan vielä hieman tarkemmin.

Muita oleellisia keihään lentoon vaikuttavia tekijöitä ovat keihään painopiste ja paineen keskipiste. Painopiste on keihään ominaisuus, eikä sen paikka lennon aikana muutu. Keihäät voidaan jakaa kolmeen eri tyyppiin painopisteen paikan perusteella: vastatuleen ja myötätuuleen soveltuviin malleihin sekä yleiseen malliin, joka ei ole optimoitu eri tuuliolosuhteisiin (Hatton, 2007). Paineen keskipisteeseen vaikuttaa ilmanvirtauksen aiheuttamat voimat, ilmanvastus (*drag*) ja nostovoima (*lift*). Paineen keskipiste ei ole painopisteen tapaan vakio, vaan se riippuu heitettävän kappaleen nopeudesta ja muodosta (Maheras, 2013). Sen paikka muuttuu ilmalennon aikana sen mukaan, miten kohtauskulma muuttuu.

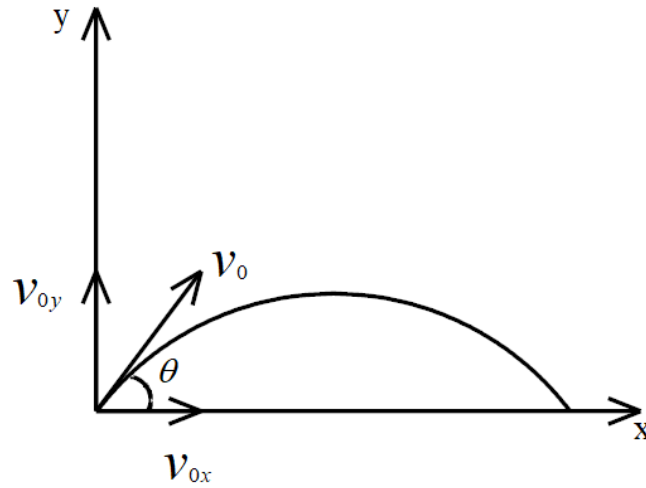
2.2 Pistemäisen kappaleen heittoliikkeen fysiikka

Tarkastellaan aluksi pistemäisen kappaleen lentorataa, jolloin ilmanvastus ja nostovoima voidaan jättää huomioimatta. Pistemäinen kappaleen tapauksessa kappaleen liiketila muuttuu ainoastaan painovoiman vaikutuksesta.

Kuvassa 2.1 on esitetty pistemäisen kappaleen lentorata, missä kappale heitetään ilmaan alkunopeudella v_0 , kulmassa θ . Nopeuden komponentti vektorit ovat tällöin

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (2.1)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \quad (2.2)$$



Kuva 2.1. Pistemäisen kappaleen lentorata, missä v_0 on lähtönopeus, v_{0x} ja v_{0y} ovat nopeuden komponentit ja θ on lähtökulma.

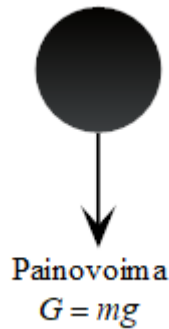
Painovoima vaikuttaa keihäeseen suoraan alaspäin, jolloin keihäällä ei ole x-akselin suuntaista kiihtyvyyttä. Kiihtyvyyden komponentit voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

Kuvassa 2.2 on esitetty pistemäiseen kappaleeseen vaikuttavat voimat ilmalennon aikana. Pistemäisenä kappaleena lentävän keihään lentomatka voidaan määrittää seuraavan kaavan avulla.

$$x = v_{0x}\Delta t \tag{2.3}$$



Kuva 2.2. Pistemäiseen kappaleeseen vaikuttavat voimat.

Lentokorkeus y voidaan kirjoittaa ajan funktiona (Knight, 2014)

$$y = y_0 + v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2, \quad (2.4)$$

missä Δt on kulunut aika. Lentoaika voidaan nyt ratkaista kaavan (2.4) avulla hyödyntämällä nopeuden y -komponentin kaavaa (2.2) ja asettamalla $y = 0$ ja $y_0 = 0$.

$$(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}g\Delta t)\Delta t = 0 \quad (2.5)$$

$$\Delta t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (2.6)$$

Sijoittamalla Δt kaavaan (2.5) voidaan x -akselin suuntainen siirtymä laskea kaavalla

$$x = (v_0 \cos \theta) \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}. \quad (2.7)$$

Hyödyntämällä trigonometrista identiteettiä $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$, saadaan siirtymälle lopullinen muoto

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (2.8)$$

Tämä on yleisesti ottaen hyvä approksimaatio keihään lentoradalle, kun keihästä käsitellään pistemäisenä kappaleena. Aiemmat tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että hyvin heitetyistä heitoista vain 5% menevät tällaisen ideaalisen lentoradan mukaan (Hatton, 2007). Tämän takia lentoradan tarkempi tarkastelu vaatii, että keihään aerodynaamiset ominaisuudet otetaan huomioon. Seuraavassa kappaleessa esitetään ilmanvastuksen vaikutus kappaleen heittoliikkeeseen.

2.3 Ilmanvastuksen vaikutus

Laajennetaan nyt tarkastelua siten, että otetaan huomioon ilmanvastuksen vaikutus kappaleen lentorataan. Voima, joka vastustaa kappaleen liikettä ilmassa, on ilmanvastus. Yleisesti tämä voima ilmenee, kun kappale on vuorovaikutuksessa väliaineen kanssa. Ilmanvastuksen ilmenemiseen tarvitaan myös liikettä kappaleen ja väliaineen välillä, jolloin vastustavaan voimaan vaikuttaa kappaleen ja väliaineen nopeuksien erotus (Elert, 2017). Tarkastellaan seuraavaksi ilmanvastuksen vaikutusta kappaleen lentorataan. Yksinkertaistuksen vuoksi tarkastellaan tilannetta, jossa kappale lentää täysin vaakasuunnassa.

Kappaleeseen vaikuttava ilmanvastus on vastakkaissuuntainen kappaleen liikkeeseen nähden. Vastustavan voiman suuruus on riippuvainen kappaleen nopeuden neliöstä suhteessa ilmaan.

$$F = Dv^2, \quad (2.9)$$

missä $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

D on tässä tapauksessa ilmanvastusta kuvaava yhtälö, joka riippuu ilmantiheydestä ρ , tuulta vastaan olevasta alueen pinta-alasta A ja ilmanvastuskertoimesta C . Johdetaan seuraavaksi ilmanvastusta kuvaava yhtälö Bernoullin yhtälön avulla,

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} v_2^2, \quad (2.10)$$

missä P on virtaavan aineen paine, ρ on aineen tiheys, g on painovoiman aiheuttama kiihtyvyys, y on putken korkeus tarkasteltavassa pisteessä ja v on virtaavan aineen nopeus. Nyt yhtälön ensimmäinen termi molemmilla puolilla kuvaa nesteen tai kaasun ulkopuolista painetta, toisin sanoen ilmanpainetta. Toinen termi on painovoiman vaikutus paineeseen, mikä aiheuttaa nostovoiman, jota käsitellään kappaleessa 2.4. Kolmas termi on nesteen tai kaasun liikkeen vaikutus paineeseen. Tiedetään, että paine on voima pinta-alaa kohden, joten

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = PA$$


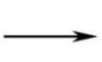
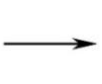

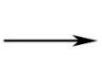




Voiman F symboli voidaan ilmanvastusta käsitellessä korvata symbolilla D . Nyt yhdistämällä Bernoullin yhtälö virtaavalle nesteelle tai kaasulle paineen yhtälöön saadaan ilmanvastukselle yhtälö (Elert, 2017),

$$D = \frac{1}{2} C_d \rho A, \quad (2.11)$$

missä C_d on kappaleen muodosta riippuva ilmanvastuskerroin (*drag coefficient*). Kuvassa 2.3 on esitetty ilmanvastuskertoimia eri muotoisille kappaleille. Keihään tapauksessa kerroin C_d on noin 0,04.

Kuvasta 2.4 nähdään, että vastustava voima F on vastakkaissuuntainen nopeuteen v nähden. Nyt voidaan kirjoittaa $F = -Dv^2$, jolloin voiman komponentit ovat

$$F_x = -Dv_x^2 \quad \text{ja} \quad F_y = -Dv_y^2 \quad (2.12)$$

Muoto		Ilmanvastuskerroin
Pallo		0.47
Puolipallo		0.42
Kartio		0.50
Kuutio		1.05
Käännetty kuutio		0.80
Pitkä sylinteri		0.82
Lyhyt sylinteri		1.15
Virtaviivainen kappale		0.04
Virtaviivainen puolikappale		0.09

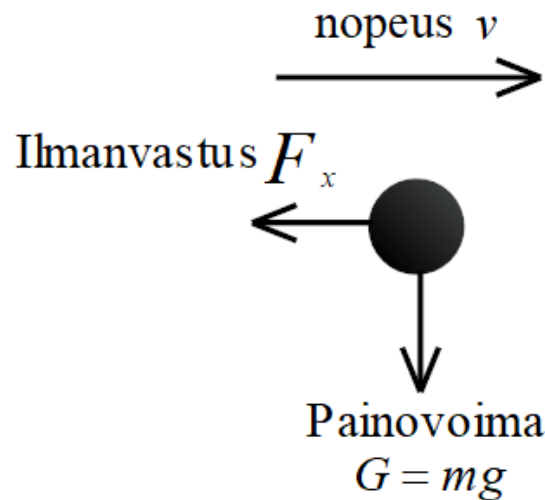
Kuva 2.3. Mitattuja ilmanvastuskertoimia. Muokattu ”(Drag coefficient Wikipedia, 2017)”

Jokainen voiman komponentti on siis samansuuntainen niitä vastaaviin nopeuden komponentteihin. Voima on nyt $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$. Kappaleen massa on vakio, joten voimme hyödyntää Newtonin toista lakia, jolloin voiman komponentit saadaan muotoon

$$\sum F_x = -Dv_x^2 = ma_x \quad \text{ja} \quad \sum F_y = -mg - Dv_y^2 = ma_y. \quad (2.13)$$

Tästä saamme kiihtyvyyden komponentit, joihin vaikuttaa painovoima ja ilmanvastus.

$$a_x = -\left(\frac{D}{m}\right)vv_x \quad \text{ja} \quad a_y = -g - \left(\frac{D}{m}\right)vv_y. \quad (2.14)$$



Kuva 2.4. Ilmanvastuksen vaikutus kappaleeseen.

Koska x-akselin suunnassa ainut vaikuttava voima on ilmanvastus, voidaan kiihtyvyys kirjoittaa kaavojen (2.11) ja (2.14) avulla muotoon

$$a_x = -\frac{c_d \rho A v_x^2}{2m}. \quad (2.15)$$

Tässä vaiheessa on tarpeellista määrittellä rajanopeuden käsite, sillä sitä joudutaan hyödyntämään paikan x lausekkeen määrittämisessä. Rajanopeudella tarkoitetaan suurinta mahdollista nopeutta, jolla putoava kappale voi liikkua putoamissuunnassa. Kappaleen nopeuden kasvaessa myös siihen vaikuttava ilmanvastusvoima kasvaa. Kun nämä voimat ovat yhtä suuret, kappale jatkaa putoamista jollakin vakionopeudella v_t . Tätä kutsutaan yleisesti rajanopeudeksi. Rajanopeudelle voidaan siten johtaa kaava asettamalla ilmanvastus D ja painovoima G yhtä suuriksi.

$$D = G$$

$$\frac{1}{2} \rho C A v_t^2 = mg$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}} \quad (2.16)$$

Hyödyntämällä tätä rajanopeuden kaavaa voidaan kiihtyvyyden lauseke muokata muotoon

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -g\left(\frac{v_x^2}{v_t^2}\right) \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{1}{v_x^2}\right) dv = -\left(\frac{g}{v_t^2}\right) dt. \quad (2.18)$$

Integroimalla lauseketta v_0 :sta v :hen nopeudelle saadaan

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v_t^2 v_{0x}}{v_t^2 + g v_{0x} t}, \quad (2.19)$$

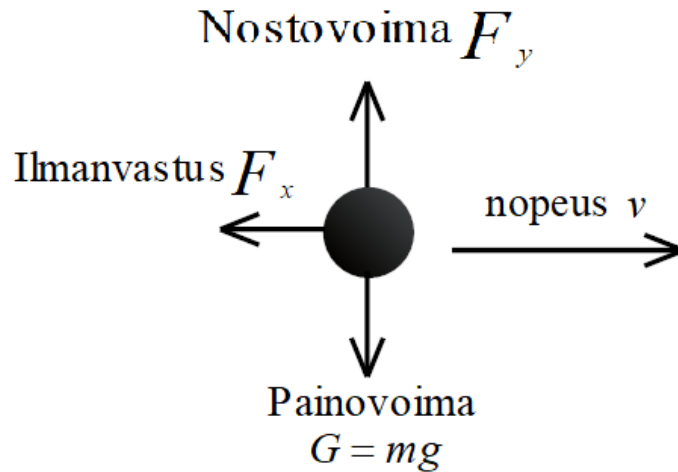
ja edelleen integroimalla nopeuden lauseketta saadaan paikan x lauseke kaikilla ajan hetkillä t

$$x = \left(\frac{v_t}{g}\right) \ln\left(\frac{v_t^2 + g v_{0x} t}{v_t^2}\right). \quad (2.20)$$

Ilmanvastus on yksi kappaleeseen vaikuttavista aerodynaamisista voimista, joka on aina nopeudelle vastakkaisuuntainen. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan nostovoimaa, joka on toinen tärkeä aerodynaaminen voima.

2.4 Nostovoiman vaikutus

Nostovoimalla tarkoitetaan kappaleen ylä- ja alapinnalla olevista paine-eroista aiheutuvaa voimaa, joka tasapainottaa maan vetovoiman aiheuttamaa alaspäin suuntautuvaa voimaa. Nostovoima on lentosuuntaan nähden kohtisuorassa ja näin ollen myös ilmanvastusta vastaan kohtisuoraan. Kuvassa 2.5 on esitetty nostovoiman vaikutus kappaleeseen.



Kuva 2.5. Kappaleeseen vaikuttavat voimat ilmalennon aikana.

Yksinkertaistuksen vuoksi tarkastellaan tilannetta, jossa nopeus on vaakasuuntainen. Nyt voidaan siis hyödyntää y-akselin suuntaista kiihtyvyyttä ja sitä kautta johtaa kaava, jossa otetaan huomioon nostovoima. Nostovoimalle voidaan johtaa yhtälö samaan tapaan kuin ilmanvastukselle, sillä siihen vaikuttavat fysikaaliset tekijät ovat samat kuin ilmanvastuksen tapauksessa, jolloin nostovoima riippuu yhtälöstä $L = \frac{1}{2}C_l\rho A$, missä C_l on nostokerroin (*lift coefficient*) (Hall, 2015).

Johdimme aiemmin kaavan (2.14), joka kuvaa y-akselin suuntaista kiihtyvyyttä. Sijoittamalla tähän kaavaan ilmanvastusyhtälö D :n paikalle nostovoimayhtälö L saadaan kiihtyvyys muotoon

$$a_y = -g - \frac{C_l\rho Av_y^2}{2m}, \quad (2.21)$$

Hyödyntämällä aiemmin määriteltyä rajanopeuden kaavaa voidaan kiihtyvyyden lauseke yksinkertaistaa muotoon

$$a = \frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + \frac{v_y^2}{v_t^2}\right) \quad (2.22)$$

$$\frac{dv}{\left(1 + \frac{v_y^2}{v_t^2}\right)} = -g dt \quad (2.23)$$

Differentiaalilaskennasta tiedetään, että $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dy}$.

Nyt kaava voidaan kirjoittaa muodossa

$$v \frac{dv}{dy} = -g \left(1 + \frac{v_y^2}{v_t^2}\right) \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{v}{1 + \frac{v_y^2}{v_t^2}}\right) dv = -g dy. \quad (2.25)$$

Tähän mennessä johdetut heittoliikkeen kaavat ovat keihään lentorataa ajatellen vain suuntaa antavia, sillä ne ovat vain yleinen tilanne ilmanvastuksen ja nostovoiman vaikutuksesta kappaleen lentorataan. Näitä saatuja tuloksia voidaan kuitenkin oleellisesti hyödyntää lopullisten lentorataa kuvaavien kaavojen määrittämisessä. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan keihään muodon vaikutusta lentorataan ja esitetään lopulliset liikkeen kaavat keihään lentoradalle.

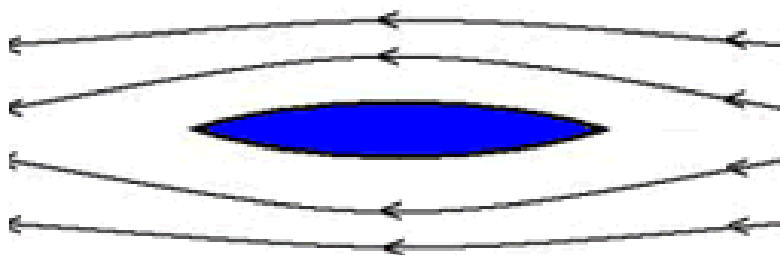
2.5 Keihään muodon vaikutus

Tässä kappaleessa esitetään keihään muodon vaikutus aiemmin johdettuihin ilmanvastuksen ja nostovoiman sisältäviin yhtälöihin. Näitä tuloksia on tutkittu ja johdettu aiemmin Kingstonin yliopistossa tehdyssä tutkimuksessa (Hatton, 2005). Seuraavissa matemaattisissa esityksissä hyödynnetään tutkimuksessa saatuja tuloksia.

Keihästä voidaan pitää virtaviivaisena kappaleena, jolloin ilma virtaa laminaarisesti, eli virtaavat hiukkaset etenevät tasaisissa rinnakkaisissa kerroksissa. Tällaisessa tilanteessa ilmavirran aiheuttama vastustava voima D voidaan arvioida olevan (Dyke, 1970)

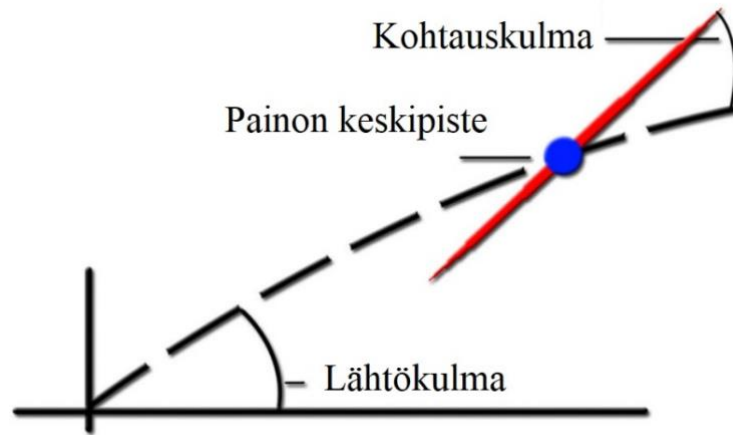
$$D = 2\gamma\rho v^2 r^2, \quad (2.26)$$

missä r on keihäänkärjen säde, ρ on ilman tiheys, v on nopeus ja γ on vakio. Tässä approksimaatiossa oletetaan, että keihään kärki on paraabelin muotoinen. Kuvassa 2.6 on esitetty laminaarinen virtaus kappaleen ympärillä.

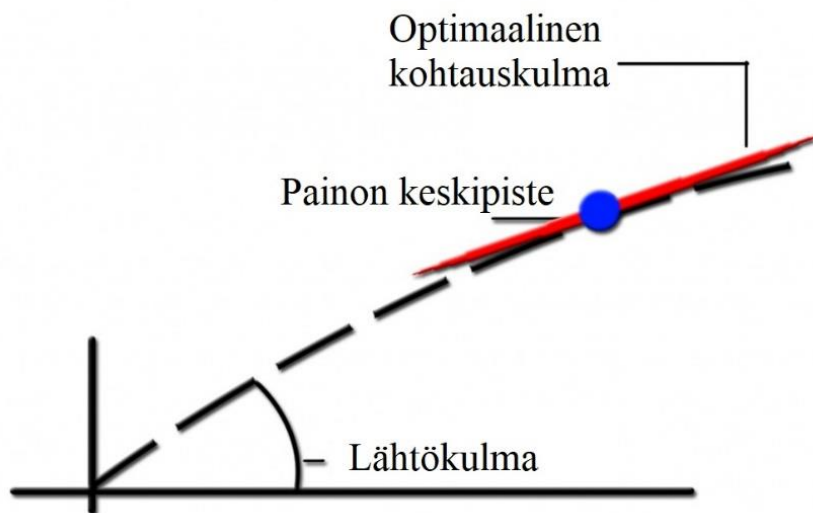


Kuva 2.6. Laminaarinen virtaus ”Muokattu (Avalance Center, 1999)”

Kun tarkastellaan keihään muotoista kappaletta, täytyy ottaa huomioon keihään nopeuden ja tuulenvirtauksen välinen kulma, jota kutsutaan kohtauskulmaksi. Kuvassa 2.7 on esitetty jokin satunnainen positiivinen kohtauskulma keihään lennon aikana, ja kuvassa 2.8 on havainnollistettu optimaalinen kohtauskulma keihään lentorataan nähden. Kohtauskulma vaikuttaa oleellisesti nostovoiman ja ilmanvastuksen suuruuteen, joten keihäs pyritään heittämään siten, että nostovoiman vaikutus on suurempi kuin ilmanvastusvoiman. Positiivinen kohtauskulma johtaa suurempaan nostovoimaan ja pienempään ilmanvastusvoimaan kuin negatiivinen kohtauskulma. Kuitenkin liian suuri kohtauskulma aiheuttaa keihäälle laahausta (*scooping*), joka taas lyhentää keihään lentorataa. Optimaalisin kohtauskulma keihäälle on $0^\circ - 5^\circ$ (Hatton, 2007). Vastatuuleen heitettäessä tilanne on kuitenkin hieman toisenlainen, sillä vastatuuli pienentää keihään nopeutta ja muuttaa sen liikesuuntaa. Analysoimalla monien ammattilaisheittäjien heittoja on huomattu, että vastatuuleen keihäs pyritään heittämään siten, että kohtauskulma on negatiivinen (Hatton, 2005).



Kuva 2.7. Positiivinen kohtauskulma keihään lennon aikana ”Muokattu (Clark, 2014)”



Kuva 2.8. Optimaalinen kohtauskulma ”Muokattu (Clark, 2014)”.

Kuvista 2.7 ja 2.8 nähdään, että kohtauskulma on riippuvainen tuulta vastaan olevasta keihään pinta-alasta. Oletetaan, että keihäs on sylinterin muotoinen, jolloin tämä pinta-ala voidaan laskea kaavasta

$$\pi r^2 + 4Lr \cos \delta, \quad (2.27)$$

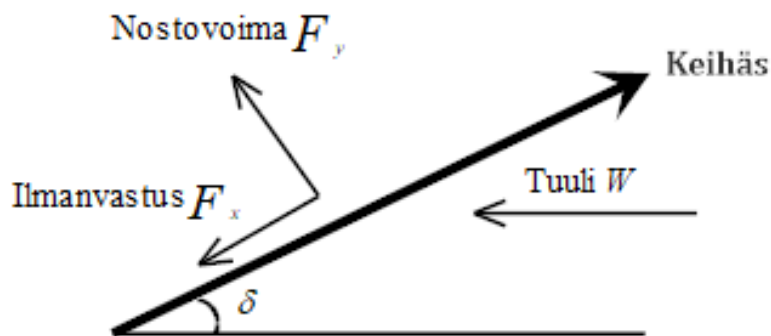
missä L on keihään pituus ja δ on kohtauskulma. Nyt ilmanvastuksen aiheuttama voima voidaan kirjoittaa muotoon

$$F_D \approx 2\gamma\rho v^2(\pi r^2 + 4Lr \cos \delta) \quad (2.28)$$

ja y-akselin suunnassa oleva nostovoima voidaan kirjoittaa muotoon

$$F_L \approx 2\gamma\rho v^2(4Lr \sin \gamma \sin \alpha) \quad (2.29)$$

Kuvassa 2.9 on esitetty keihääseen vaikuttavat ilmanvastus, nostovoima, vastatuuli ja kohtauskulma.



Kuva 2.9. Keihääseen vaikuttavat aerodynaamiset voimat, missä W on vastatuuli ja δ on kohtauskulma.

Seuraavaksi yhdistetään kaikki aiemmin mainitut tekijät ja esitetään täydelliset liikkeen yhtälöt, joita voidaan hyödyntää keihään lentoradan ennustamisessa.

Olkoon keihään massa m , kohtauskulma δ ja paikkavektori (r, s, g) , missä r on keihään lentoradan suuntaan, s on ylöspäin ja g on sivuttaissuunnassa oikealta vasemmalle. Näiden kolmen suunnan ratkaiseminen Newtonin toisen lain avulla ja yhdistämällä ilmanvastuksen ja nostovoiman kaavat (2.28) ja (2.29) saadaan liikkeelle seuraavat epälineaariset differentiaaliyhtälöt (Hatton, 2005)

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg + 8\gamma\rho r L \cdot \sin \delta \sin \alpha \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad (2.30)$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -(2\gamma\pi\rho r^2 + 8\gamma\rho r L \cdot |(\sin \delta)|) \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad (2.31)$$

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = 0. \quad (2.32)$$

Näissä kaavoissa termit $8\gamma\rho r L$ ja $2\gamma\pi\rho r^2$ ovat sovituskvakioita. Paikkavektorin (r, s, g) suuruus kaikilla ajanhetkillä t saadaan integroimalla yllä olevia differentiaalilausekkeita käyttämällä Kutta-Merson menetelmää (Hatton, 2005).

Alkutilanteessa ajanhetkellä $t = 0$ paikkavektorin komponentit ovat

$$r = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = V(\cos \alpha) \quad (2.33)$$

$$s = h$$

$$\frac{ds}{dt} = V(\sin \alpha) \quad (2.34)$$

$$q = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = W, \quad (2.35)$$

missä W on vastatuuli.

Tässä kappaleessa saatujen tulosten avulla voitaisiin keihään lentorataa simuloida tietokoneen avulla melko tarkalla tasolla. Näiden tulosten tarkempi johtaminen ja käsittely ei kuitenkaan ei ole tämän tutkielman kannalta oleellista.

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää keihään lentorataan vaikuttavia tekijöitä ja esittää niitä fysikaalisesti ja matemaattisesti. Tutkimustavoitteet saavutettiin selvittämällä keihäänheitosta tehtyjen aiempien tutkimusten perusteella oleellisia keihään lentoon vaikuttavia tekijöitä ja esittämällä keihään lentoa kuvaava matemaattinen malli, joka kuvaa keihään lentoa riittävän tarkalla tasolla. Tutkimuksen sisältö etenee johdonmukaisesti ja asioiden tarkastelu aloitetaan yksinkertaiselta tasolta, jolloin fysiikan perustiedot hallitseva pystyy ymmärtämään tutkimuksen sisällön. Tutkielman laajuuden vuoksi tutkimuksen sisältö on vain teoriakatsaus keihäänheiton lentoon vaikuttavasti tekijöistä.

Opettajan näkökulmasta tämä tutkimus syventää oleellisesti tietämystä kappaleen heittoliikkeestä ja ilmanvastuksen sekä nostovoiman vaikutuksesta. Pistämäisen kappaleen heittoliike on hyvä approksimaatio heittoliikkeestä, ja sen käsitteleminen kouluissa auttaa oppilaita ymmärtämään yksinkertaisia heittoliikkeeseen liittyviä ongelmia. Ilmanvastuksen ja nostovoiman käsitteleminen ei varsinaisesti kuulu lukion opetussuunnitelmaan, joten niiden hyödyntäminen kouluopetuksessa voi valitettavasti olla turhan hankalaa. Kuitenkin tämän tutkimuksen avulla voi motivoida oppilaiden mielenkiintoa fysiikkaa kohtaan antamalla pientä vilausta siitä, minkälaisia asioita heittoliikkeen yhtälöiden avulla voidaan tutkia.

Tutkimusta voitaisiin laajentaa hyvinkin helposti esimerkiksi liittämällä tutkimukseen teorian lisäksi erilaisia kokeellisia osioita. Mielenkiintoista olisi esimerkiksi tutkia kokeellisesti, kuinka keihään erilaiset ominaisuudet, kuten massa ja pituus vaikuttavat lentorataan. Myöskin lähtökulman, kohtauskulman ja lähtönopeuden vaikutuksen tutkiminen olisi kiinnostavaa, sillä niillä on suurin vaikutus keihään lentämiseen. Opetuskäyttöön mielenkiintoisempia jatkotutkimusideoita olisi esimerkiksi jonkinlaisen simulaation tekeminen, jota voitaisiin käyttää opetuskäytössä heittoliikkeen simuloimiseen. Tällaisia simulaatiota kuitenkin on jo olemassa melko paljon. Pedagogian näkökulmasta tutkimusta voitaisiin jatkaa myös selvittämällä lukiolaisten tietoja ja taitoja heittoliikkeestä sekä kartoittamalla mahdollisia virhekäsityksiä.

Keihäänheittoon liittyvän teoria sisällön selvittäminen sujui melko vaivattomasti, sillä aiempia tutkimuksia oli hyvin saatavilla, ja pistemäisen kappaleen heittoliikkeen teoria oli itselleni jo ennestään tuttua. Keihään muodon vaikutus näihin heittoliikkeen kaavoihin oli itselleni kokonaan uutta asiaa, ja sen käsitteleminen sekä ymmärtäminen olivat välillä haastavaa. Aiemmin tehdyissä keihäänheittoon liittyvissä tutkimuksissa on keskitytty ihmisen biomekaniikan vaikutukseen, ja matemaattinen tarkastelu on ollut hieman toissijaista. Oma tietämystä aerodynaamisista voimista sai syvennettyä eri kappaleiden, kuten kiekon tai pallon, lentämiseen liittyvistä tutkimuksista.

- (1999). Haettu 14.1.2018 osoitteesta Avalance Center: <http://www.avalanche-center.org/Education/glossary/images/wind-flow-diagram.gif>
- (2017). Haettu 11.1.2018 osoitteesta Biomechanics Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/Biomechanics>
- (2017). Haettu 11.1.2018 osoitteesta Drag coefficient Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient
- Best, R. J.;Bartlett, R. M.;& Sawyer, R. A. (1995). Optimal Javelin Release. *Journal of applied biomechanics* , 11,371-394.
- Chiu, C.-H. (2009). Discovering Optimal Release Conditions for the Javelin World Record Holders by Using Computer Simulation. *International Journal of Sport and Exercise Science*, 1,(2),41-50.
- Clark, J. (2014). Haettu 11.1.2018 osoitteesta The Jav Lab: <https://www.just-fly-sports.com/optimal-javelin-flight-physics-and-fixes/>
- Dyke, M. v. (1970). *Perturbation methods in fluid mechanics*. Academic Press.
- Elert, G. (2017). *The Physics Hypertextbook*. Haettu 19.11.2017 osoitteesta <https://physics.info/drag/>
- Gregor, R. J.;& Pink, M. (1985). Biomechanical Analysis of a World Record Javelin Throw: A Case Study. *International journal of sport biomechanics*, 1,73-77.
- Hall, N. (2015). Haettu 14.1.2018 osoitteesta The Lift Equation NASA: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/lifteq.html>

- Hall, N. (2015). Haettu 14.1.2018 osoitteesta The Drag Equation:
<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/drageq.html>
- Hatton, L. (2005). *The physics and mathematics of javelin throwing*. Faculty of Computing, Information Systems and Mathematics, University of Kingston.
- Hatton, L. (2007). *Optimising the javelin throw in the presence of prevailing winds*. Faculty of Computing, Information Systems and Mathematics, University of Kingston.
- Hubbard, M.;& Bergman, C. D. (1989). Effect of Vibrations on Javelin Lift and Drag. *International journal of sports biomechanics*, 139-150.
- Knight, R. D. (2014). *Physics for Scientists and Engineers A Strategic Approach with Modern Physics*. Pearson.
- Komi, P. V.;& Mero, A. (1985). Biomechanical Analysis of Olympic Javelin Throwers. *International journal of sport biomechanics*, 1,139-150.
- Maheras, A. V. (2013). Basic javelin aerodynamics and flight characteristics. *techniques for Track & Field and Cross Country*, Volume 7, Number 1.
- Terry, S. (2017). Haettu 17.12.2017 osoitteesta Livestrong:
<https://www.livestrong.com/article/341425-history-of-javelin-throwing/>